7 класс

Задача 7.1. Книжный червь.

Червячок Геннадий прогрыз насквозь стоящий на полке четырёхтомный физический справочник (расположение книг изображено на рис. 7.1). Общая толщина страниц каждого тома этого справочника равна 4 см, а толщина каждой обложки — 3 мм. Известно, что Геннадий прогрызает путь от первой страницы первого тома до последней страницы второго тома за 12 мин, а путь от последней страницы третьего тома до первой страницы четвёртого — за 20 мин.

1. С какой скоростью v (в мм/мин) червячок грызёт обложку справочника?
2. С какой скоростью u (в мм/мин) Геннадий грызёт его страницы?
3. Найдите среднюю скорость $v_{ср}$ прогрызания червячком всего пути сквозь тома справочника.

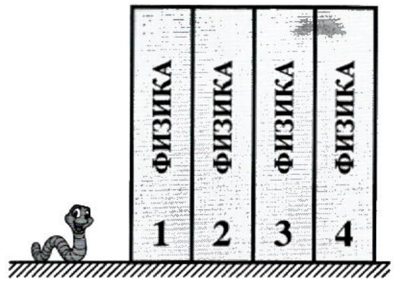


Рис. 7.1.

Считать, что червячок всё время движется по прямой перпендикулярно страницам, нигде не останавливается и не разворачивается. Скорости u и v прогрызания страниц и обложек постоянны и не зависят от номера тома.

Ответ: 1) $v = 0{,}5$ мм/мин; 2) $u = 10$ мм/мин; 3) $v_{ср} \approx 2{,}9$ мм/мин.

Решение: Самое главное, что нужно понимать при решении этой задачи — где находятся первая и последняя страница каждого тома справочника (см. рис. 7.2).

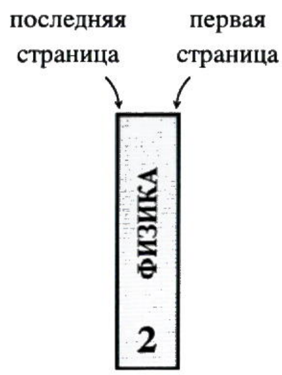


Рис. 7.2.

Расстояние от первой страницы первого тома до последней страницы второго составляет две толщины обложки, а расстояние от последней страницы третьего тома до первой страницы четвёртого — 2 обложки и 2 толщины блока страниц в томе. Так как первый путь червячок прогрыз за 12 мин, то средняя скорость прогрызания обложки составила

$$v = \frac{2 \cdot 3\ \text{мм}}{12\ \text{мин}} = 0{,}5\ \text{мм/мин}.$$

Во втором случае траектория Геннадия проходит через два блока страниц и две обложки, причём на последние он тратит 12 мин. Отсюда следует, что скорость прогрызания страниц равна

$$u = \frac{2 \cdot 40\ \text{мм}}{20\ \text{мин} - 12\ \text{мин}} = 10\ \text{мм/мин}.$$

Весь путь Геннадия состоит из 8 обложек и 4 блоков страниц. Средняя скорость червячка на всём пути равна

$$v_{ср} = \frac{8 \cdot 3\ \text{мм} + 4 \cdot 40\ \text{мм}}{\frac{8 \cdot 3\ \text{мм}}{0{,}5\ \text{мм/мин}} + \frac{4 \cdot 40\ \text{мм}}{10\ \text{мм/мин}}} = \frac{184\ \text{мм}}{48\ \text{мин} + 16\ \text{мин}} \approx 2{,}9\ \text{мм/мин}.$$

Критерии:

1) Есть понимание, где у книг, изображённых на рисунке, первая и последняя страницы . . . . 0,5 балла
2) Найдено верное значение v . . . . 2 балла
3) Правильно найдено время прогрызания блоков (одного, двух или более) . . . . 1,5 балла
4) Найдено верное значение u . . . . 2 балла
5) Найдено верное значение пройденного Геннадием пути (184 мм) . . . . 1 балл
6) Найдено верное значение затраченного Геннадием времени (64 мин) . . . . 1 балл
7) Найдено верное значение $v_{ср}$ . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Если за любой из пп. 2-7 у участника стоят баллы, балл за пункт 1 ставится автоматически.
2) Пункты 3, 5, 6 могут содержаться внутри соответствующих формул для u и $v_{ср}$.
3) Если за п. 4 поставлен полный балл, баллы за п.3 ставятся автоматически. Аналогично, если в п.7 поставлен полный балл, автоматически ставятся баллы за пп. 5 и 6.
4) Если ответ в пп. 2 и 4 (почему-то) дан не в мм/мин, а в других единицах, соответствующий пункт оценивается максимум в 1 балл.
5) В п. 7 ответ может быть дан в любых допустимых единицах.

Задача 7.2. Дорога туда и обратно.

Как-то раз экспериментатор Иннокентий Иванов поехал на своём автомобиле из Аистово в Ведёркино. Первую четверть своего пути он ехал со скоростью 60 км/ч, половину оставшегося пути — со скоростью 45 км/ч, а последний участок — со скоростью 66 км/ч. Обратный же путь из Ведёркино в Аистово у него занял на 25% больше времени, причём первую треть всего времени движения в обратную сторону Иннокентий ехал со скоростью 15 м/с. Какова была средняя скорость автомобиля на оставшейся части пути из Ведёркино в Аистово? Путь туда и обратно был одинаковым.

Ответ: 39 км/ч.

Решение: Пусть s — длина всего пути из Аистово в Ведёркино, тогда $s/4$ — длина первого участка, а $3s/8$ — длина второго и третьего. Найдём среднюю скорость на всём пути туда (из Аистово в Ведёркино):

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{\frac{s/4}{60\text{ км/ч}} + \frac{3s/8}{45\text{ км/ч}} + \frac{3s/8}{66\text{ км/ч}}} = \frac{1}{\frac{1}{240} + \frac{1}{120} + \frac{1}{176}}\text{ км/ч} = 55\text{ км/ч}.$$

На обратный путь Иннокентий потратил на 25% больше времени, то есть время из Ведёркино в Аистово было равно

$$t_{\text{обр}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{s}{v_{\text{ср}}}.$$

Следовательно, средняя скорость на обратном пути была

$$v_{\text{ср обр}} = \frac{s}{t_{\text{обр}}} = \frac{4}{5} v_{\text{ср}} = 44\text{ км/ч}.$$

Пусть скорость на заключительном участке пути из Ведёркино в Аистово, занявшем 2/3 времени движения в обратную сторону, равна u. Тогда

$$v_{\text{ср обр}} = \frac{54\text{ км/ч} \cdot t_{\text{обр}}/3 + u \cdot 2t_{\text{обр}}/3}{t_{\text{обр}}} = \frac{54}{3}\text{ км/ч} + \frac{2}{3}u \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}u = 44\text{ км/ч} - 18\text{ км/ч} = 26\text{ км/ч} \quad \Rightarrow \quad u = 39\text{ км/ч}.$$

Критерии:

1) Найдено, что второй и третий участки на пути из Аистово в Ведёркино равны $3s/8$ . . . . 1 балл
2) Записано верное выражение для средней скорости на пути из Аистово в Ведёркино . . . . 2 балла
3) Найдено верное значение для средней скорости на пути из Аистово в Ведёркино . . . . 2 балла
4) Записано верное выражение для средней скорости на обратном пути . . . . 1,5 балла
5) Записана формула $t_{\text{обр}} = 1{,}25s/v_{\text{ср}}$ или аналогичная . . . . 1 балл
6) Найдено верное значение u . . . . 2,5 балла

Указание проверяющим:

1) Выражение в п. 2 должно содержать только скорости на трёх участках и, возможно, несокращённую величину полного пути s (или аналогичную).
2) Выражение в п. 4 должно содержать только скорости на двух участках обратного пути и, возможно, несокращённую величину полного времени на обратный путь (или аналогичную).
3) В п. 5 достаточно написать, что $v_{\text{ср обр}} = 0{,}8v_{\text{ср}}$.
4) Если получено правильное значение u, баллы за все остальные пункты ставятся автоматически.

Задача 7.3. Средняя скорость шляпы.

Экспериментатор Иннокентий Иванов, гуляя по набережной реки, уронил в воду свою любимую шляпу, которая, подхваченная течением, поплыла от него прочь. Решив во что бы то ни стало вернуть свой головной убор, Иннокентий нашёл лодку, сел в неё и догнал шляпу ниже по течению. После чего, быстро подобрав её, он немедленно развернулся и приплыл в то же самое место, где взял лодку. Скорость течения реки и скорость движения лодки относительно воды всюду постоянны и равны $u = 2$ м/с и $v = 6$ м/с соответственно, а средняя скорость шляпы (относительно берега) на всём её пути по реке туда-обратно $v_{ср} = 2{,}5$ м/с.

1. На каком расстоянии от места потери шляпы учёный нашёл лодку, если между моментом, когда он её уронил, и отплытием на лодке прошло $t_0 = 5$ мин?
2. Выше или ниже по течению (относительно места потери) Иннокентий нашёл лодку?

Шириной реки можно пренебречь.

Ответ: 1) 240 м; 2) ниже по течению.

Решение: Пусть s — искомое расстояние между местом потери шляпы и лодкой. Будем считать, что $s > 0$, если лодка находилась ниже по течению реки, и $s < 0$, если она была выше по течению.

За время t_0, пока Иннокентий искал лодку, шляпа проплыла расстояние $L = ut_0 = 600$ м. Найдём время погони за ней на лодке:

$$t_{пог} = \frac{L - s}{v} = \frac{600\text{ м} - s}{6\text{ м/с}} = 100\text{ с} - \frac{s}{6\text{ м/с}}.$$

В итоге, шляпа успела уплыть на расстояние

$$L_1 = L + ut_{пог} = 600\text{ м} + 200\text{ м} - s/3 = 800\text{ м} - s/3.$$

Обратно Иннокентий вместе со шляпой двигался со скоростью $v - u$. Время на обратный путь составило

$$t_{обр} = \frac{L_1 - s}{v - u} = \frac{800\text{ м} - 4s/3}{4\text{ м/с}}.$$

Общее время «путешествия» шляпы равно, с одной стороны,

$$t_{общ} = \frac{2L_1 - s}{v_{ср}} = \frac{1600\text{ м} - 5s/3}{2{,}5\text{ м/с}},$$

а с другой стороны, $t_{общ} = t_0 + t_{пог} + t_{обр}$. Отсюда

$$\frac{1600\text{ м} - 5s/3}{2{,}5\text{ м/с}} = 300\text{ с} + 100\text{ с} - \frac{s}{6\text{ м/с}} + \frac{800\text{ м} - 4s/3}{4\text{ м/с}} \qquad \Rightarrow \qquad s = 240\text{ м}.$$

Так как получившееся значение положительно, лодка находилась ниже по течению от места потери шляпы.

Альтернативное объяснение п.2: На второй вопрос задачи можно ответить, не вычисляя s. Предположим, что лодка находилась прямо на месте, где улетела шляпа. Тогда средняя скорость шляпы на пути туда-обратно должна быть равна

$$v'_{ср} = \frac{2L_1}{L_1/(2\text{ м/с}) + L_1/(4\text{ м/с})} \approx 2{,}67\text{ м/с}.$$

Так как данная в условии средняя скорость меньше этого значения, участок, когда Иннокентий вёз шляпу обратно (участок с бо́льшей скоростью), должен быть короче, а значит, лодка находилась изначально ниже по течению.

Критерии:

1) Записано верное выражение или верное значение для расстояния L . . . . 0,5 балла
2) Записано выражение для времени погони $t_{пог} = (L - s)/v$ . . . . 1,5 балла
3) Записано выражение для максимального удаления шляпы от пристани $L_1 = L + ut_{пог}$ или аналог . . . . 1 балл
4) Указано, что полный путь шляпы равен $2L_1 - s$ . . . . 1 балл
5) Записано верное выражение для времени на обратный путь $t_{обр} = (L_1 - s)/(v - u)$ . . . . 1,5 балла
6) Записано верное уравнение, содержащее только s и заданные величины (или числа) . . . . 1,5 балла
7) Найдено значение s . . . . 2 балла
8) Дан обоснованный ответ на второй вопрос задачи . . . . 1 балл

Указания проверяющим:

1) В пп. 2-7 знак перед s будет систематически отличаться от приведённого в авторском решении, если участник поместил лодку выше по течению. Если всё сделано корректно, баллы ставятся.
2) В пунктах 1-4 подстановка чисел и полученных ранее выражений не обязательна.
3) Выражения из пп. 1-5 критериев могут быть написаны сразу внутри уравнения из п. 6. В этом случае баллы за все правильно написанные формулы ставятся.
4) Обоснование в п. 8 может быть сделано любым корректным способом (например, одним из двух, приведённых в авторском решении). Если нет никаких следов обоснования, балл не ставить, даже в случае ответа, совпавшего с правильным!

Задача 7.4. Чернила на графике.
Мальчики Паша и Миша экспериментировали в школьной лаборатории. Они взяли пустой сосуд, имеющий вертикальные стенки и плоское дно, поставили на дно цилиндр и начали тонкой струйкой наливать в сосуд воду. Через некоторое время Паша вспомнил, что хотел поместить в сосуд не один, а два цилиндра, после чего он, не выключая воду, аккуратно поставил на дно сосуда второй цилиндр. Мише же было поручено снять зависимость высоты h уровня воды в сосуде от времени t и построить соответствующий график. Мальчик, в целом, справился с заданием, но в последний момент умудрился капнуть чернилами и залить часть построенного графика (см. рис. 7.3). Определите по графику:
1. высоты первого и второго цилиндров,
2. площадь дна сосуда,
3. объёмы обоих цилиндров.

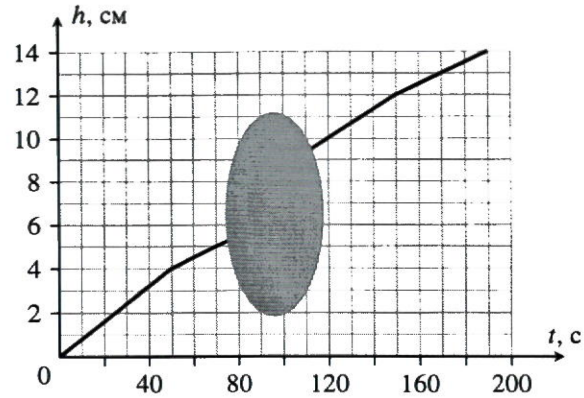


Рис. 7.3.

Мальчики помнили, что ежеминутно в сосуд поступало 72 мл воды, оба цилиндра стояли вертикально, а второй цилиндр Паша поставил очень быстро.

Ответ: 1) 4 см, 12 см; 2) 24 см^2; 3) 36 см^3, 72 см^3.

Решение: 1. Рассмотрим график, приведённый в условии задачи. На первом участке вода поднимается на 4 см за 50 с, после чего скорость подъёма воды падает, и за следующие 20 с (до кляксы) уровень поднимается только на 1 см. Изменение скорости подъёма не может быть связано с постановкой на дно второго цилиндра (в этом случае она бы увеличилась, а не уменьшилась), значит, при $h = 4$ см первый цилиндр оказался полностью под водой. На третьем участке (после кляксы) скорость поднятия уровня стала больше, чем на втором (2 см за 30 с), а на четвёртом снова вернулась к тому же значению, что и на втором участке. Из всего перечисленного можно сделать вывод, что высота первого цилиндра равна 4 см, а высота второго — 12 см.

Альтернативный способ обоснования: При погружении второго цилиндра уровень воды должен резко подняться, чего на видимой части графика нет. Значит, второй цилиндр Паша погрузил в сосуд в той части графика, которая находится под кляксой. А переломы графика соответствуют полному погружению цилиндров в воду. Поэтому $h_1 = 4$ см, $h_2 = 12$ см.

2. Так как на втором (и четвёртом) участках площадь поверхности воды равна площади дна сосуда S_0,

$$S_0 \cdot 1\text{ см} = 72\text{ см}^3/\text{мин} \cdot 20\text{ с} = 24\text{ см}^3 \quad\Rightarrow\quad S_0 = 24\text{ см}^2.$$

3. Найдём площади сечения обоих цилиндров S_1 и S_2. Для это рассмотрим первый и третий участок графика:

$$(S_0 - S_1) \cdot 4\text{ см} = 72\text{ см}^3/\text{мин} \cdot 50\text{ с} = 60\text{ см}^3 \quad\Rightarrow\quad S_0 - S_1 = 15\text{ см}^2 \quad\Rightarrow\quad S_1 = 24\text{ см}^2 - 15\text{ см}^2 = 9\text{ см}^2,$$

$$(S_0 - S_2) \cdot 2\text{ см} = 72\text{ см}^3/\text{мин} \cdot 30\text{ с} = 36\text{ см}^3 \quad\Rightarrow\quad S_0 - S_2 = 18\text{ см}^2 \quad\Rightarrow\quad S_2 = 24\text{ см}^2 - 18\text{ см}^2 = 6\text{ см}^2.$$

Отсюда найдём объёмы цилиндров: $V_1 = 4\text{ см} \cdot 9\text{ см}^2 = 36\text{ см}^3$, $V_2 = 12\text{ см} \cdot 6\text{ см}^2 = 72\text{ см}^3$.

Альтернативный способ нахождения S_2: За 150 с в сосуд налилось $72\text{ см}^3/\text{мин} \cdot 150\text{ с} = 180\text{ см}^3$ воды. Кроме того, в сосуде находится первый цилиндр объёмом 36 см^3. Поэтому

$$(S_0 - S_2) \cdot 12\text{ см} = 180\text{ см}^3 + 36\text{ см}^3 = 216\text{ см}^3 \quad\Rightarrow\quad S_0 - S_2 = 18\text{ см}^2.$$

Критерии:
1) Найдена высота первого цилиндра (4 см) . . . . 0,5 балла
2) Найдена высота второго цилиндра (12 см) . . . . 0,5 балла
3) Приведено верное обоснование, что данные значения (4 и 12 см) — высоты цилиндров . . . . . . 1 балл
4) Найдено верное значение S_0 . . . . 2 балла
5) Найдено верное значение S_1 . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение S_2 . . . . 2 балла
7) Найден объём первого цилиндра (36 см^3) . . . . 1 балл
8) Найден объём второго цилиндра (72 см^3) . . . . 1 балл

Указание проверяющим:
1) Если поставлены баллы за п. 7, то баллы за п. 5 ставятся автоматически. Аналогично, если поставлены баллы за п. 8, то баллы за п. 6 ставятся автоматически.
2) Если нет корректного обоснования в п. 3, остальные пункты оцениваются независимо.

Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. График скорости лодки.

Моторная лодка, отплывшая от пристани на реке, на протяжении 2 часов двигалась вдоль берега в одну сторону, затем развернулась и через 3 часа вернулась обратно на пристань. Скорость лодки **относительно воды** менялась со временем так, как показано на графике (рис. 8.1).

1. Чему равна скорость течения реки?
2. Вверх или вниз по течению вначале плыла лодка?
3. На каком расстоянии от пристани лодка развернулась?

Скорость течения реки считать постоянной. Временем, потраченным на разворот, и шириной реки пренебречь.

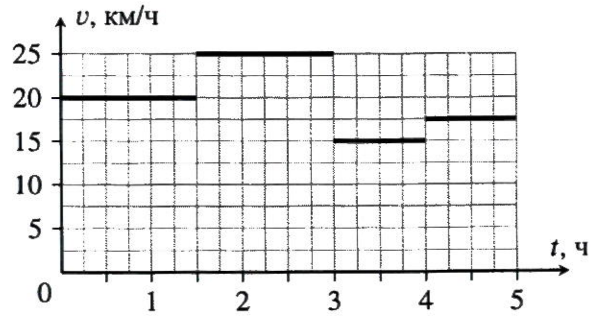


Рис. 8.1.

Ответ: 1) 3 км/ч; 2) вниз по течению; 3) 48,5 км.

Решение: 1. Пусть u — скорость течения реки, причём будем считать, что $u > 0$, если вначале лодка двигалась по течению, и $u < 0$, если вначале она двигалась против него.

Найдём расстояния, которые прошла лодка туда и обратно:

$$s_{\text{туда}} = (20 \text{ км/ч} + u) \cdot 1{,}5 \text{ ч} + (25 \text{ км/ч} + u) \cdot 0{,}5 \text{ ч} = 42{,}5 \text{ км} + u \cdot 2 \text{ ч},$$

$$s_{\text{обратно}} = (25 \text{ км/ч} - u) \cdot 1 \text{ ч} + (15 \text{ км/ч} - u) \cdot 1 \text{ ч} + (17{,}5 \text{ км/ч} - u) \cdot 1 \text{ ч} = 57{,}5 \text{ км} - u \cdot 3 \text{ ч}.$$

Оба расстояния равны, поэтому

$$42{,}5 \text{ км} + u \cdot 2 \text{ ч} = 57{,}5 \text{ км} - u \cdot 3 \text{ ч} \quad \Rightarrow \quad u \cdot 5 \text{ ч} = 15 \text{ км} \quad \Rightarrow \quad u = 3 \text{ км/ч}.$$

2. Так как $u > 0$, вначале лодка двигалась по течению.
3. Вычислим расстояние, пройденное лодкой от пристани до разворота:

$$L = 42{,}5 \text{ км} + u \cdot 2 \text{ ч} = 42{,}5 \text{ км} + 3 \text{ км/ч} \cdot 2 \text{ ч} = 48{,}5 \text{ км}.$$

Критерии:

1) Записано правильное выражение для пути в одну сторону . . . . 2 балла
2) Записано правильное выражение для пути в другую сторону . . . . 2 балла
3) Найдена скорость течения (3 км/ч) . . . . 2 балла
4) Правильно определено первоначальное направление движения лодки (вопрос 2) . . . . 2 балла
5) Найдено расстояние до места разворота (48,5 км) . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

В пп. 1 и 2 знак перед u будет систематически отличаться от приведённого в авторском решении, если участник предположил, что вначале лодка шла против течения. Если всё сделано корректно, баллы ставятся.

Задача 8.2. Раз термометр, два термометр.

Как-то раз, оставшись в школьной лаборатории, девочка Маша взяла два теплоизолированных калориметра. В первый из них она налила немного холодной воды, а во второй — немного горячей, после чего опустила в каждый калориметр один из двух **одинаковых** термометров. Записав показания приборов (5 ℃ и 75 ℃), девочка быстро вытащила оба термометра и поменяла их местами. Оказалось, что теперь термометр, опущенный в холодную воду, показывает 7 ℃, в то время как другой — 70 ℃. Удивившись, Маша решила перелить всю горячую воду в калориметр с холодной, не вынимая оттуда прибор. Определите, какую температуру должен теперь показать термометр, оставшийся в калориметре с водой. Оба прибора исправны, а их показания Маша записывала, дождавшись наступления теплового равновесия. Теплоёмкостью стенок калориметров можно пренебречь, вода из сосудов не выливается.

Ответ: 24 ℃.

Решение: Пусть C — теплоёмкость одного термометра, а m_1 и m_2 — масса воды в первом и втором сосуде соответственно. Когда первый прибор, имевший температуру 5 ℃, перенесли в сосуд с водой при температуре 75 ℃, там установилась температура 70 ℃:

$$C(70\,℃ - 5\,℃) = c_в m_2(75\,℃ - 70\,℃) \qquad \Rightarrow \qquad m_2 = \frac{C \cdot 13\,℃}{c_в}.$$

Наоборот, второй прибор, имевший температуру 75 ℃, перенесли в сосуд с водой при 5 ℃, после чего там установилась температура 7 ℃:

$$C(75\,℃ - 7\,℃) = c_в m_1(7\,℃ - 5\,℃) \qquad \Rightarrow \qquad m_1 = \frac{C \cdot 34\,℃}{c_в}.$$

Когда же Маша перелила горячую воду, имевшую температуру 70 ℃, в калориметр с холодной водой и термометром при 7 ℃, в нём установилась температура t. Найдём её, подставляя в уравнение теплового баланса полученные выражения для m_1 и m_2:

$$C(t - 7\,℃) + c_в m_1(t - 7\,℃) = c_в m_2(70\,℃ - t) \qquad \Rightarrow \qquad (C + 34C)(t - 7\,℃) = 13C(70\,℃ - t) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad 48t = 35 \cdot 7\,℃ + 13 \cdot 70\,℃ \qquad \Rightarrow \qquad t \approx 24\,℃.$$

Критерии:

1) Правильно записано уравнение теплового баланса для первого сосуда . . . . 2 балла
2) Правильно записано уравнение теплового баланса для второго сосуда . . . . 2 балла
3) Правильно записано уравнение теплового баланса для третьего случая . . . . 3 балла
4) Получено значение установившейся температуры $t \approx 24$ ℃ . . . . 3 балла

Указание проверяющим:

1) Участники могут по ходу решения подставить известную им, но не данную в условии удельную теплоёмкость воды (4200 Дж/(кг·℃)). Это допустимо.

2) Если в каком-либо уравнении (пп. 1-3) перепутаны температуры и/или знаки, баллы за соответствующий пункт не ставить!

Задача 8.3. Пузатый сосуд.
В сообщающиеся сосуды, правый из которых представляет собой вертикальный цилиндр диаметром d, закрытый тяжёлым поршнем, а левый — очень узкую вертикальную трубку с уширением в форме сферы диаметром D, налиты бензин и вода. Бензин полностью находится в сферической части, занимая её нижнюю половину, а поршень расположен на одном уровне с нижней поверхностью бензина (см. рис. 8.2). На поршень сверху поставили груз, масса которого в 2,8 раза больше массы поршня, в результате чего бензин полностью заполнил **верхнюю** половину сферической части левого сосуда. Каково отношение D/d? Плотность бензина равна 70% от плотности воды. Трением между поршнем и стенками пренебречь.
Примечание: Объём шара вычисляется по формуле $V = 4\pi R^3/3$, где R — радиус шара, а площадь круга — по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус круга.

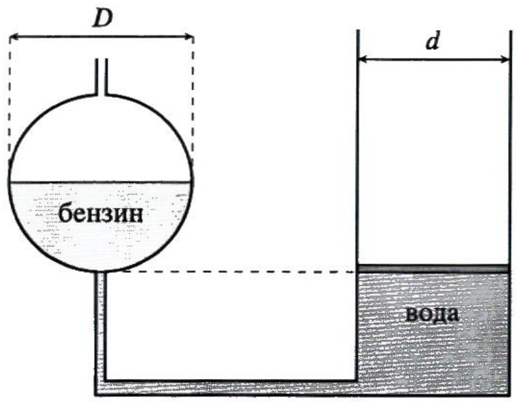


Рис. 8.2.

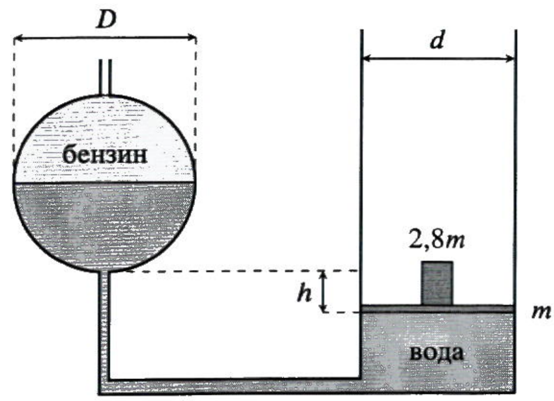


Рис. 8.3.

Ответ: $D/d = 1{,}2$.

Решение: Пусть m — масса поршня. Тогда масса груза равна $2{,}8m$. Когда на поршень поставили груз, тот опустился вниз на расстояние h (рис. 8.3). Так как вода несжимаема, объём воды, убывшей справа, равен объёму половины сферической части левого сосуда:

$$\frac{\pi d^2}{4}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi D^3}{6} \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{D^3}{3d^2}.$$

Давление бензина в первом случае равно давлению поршня:

$$\rho_б g\cdot\frac{D}{2} = \frac{mg}{\pi d^2/4} \qquad \Rightarrow \qquad m = \rho_б\cdot\frac{\pi D d^2}{8}.$$

Запишем теперь условие равенства давлений на уровне поршня во втором случае:

$$\frac{3{,}8mg}{\pi d^2/4} = \rho_б g\cdot\frac{D}{2} + \rho_в g\left(\frac{D}{2}+h\right) \qquad \Rightarrow \qquad 3{,}8\rho_б g\cdot\frac{D}{2} = \rho_б g\cdot\frac{D}{2} + \rho_в g\left(\frac{D}{2}+\frac{D^3}{3d^2}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad 2{,}8\cdot 0{,}7 = 1 + \frac{2D^2}{3d^2} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{D}{d}\right)^2 = 1{,}44 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{D}{d} = 1{,}2.$$

Критерии:
1) Получена правильная связь между h, D и d . . . . 2 балла
2) Правильно записано условие равенства давлений в первом случае . . . . 2,5 балла
3) Правильно записано условие равенства давлений во втором случае . . . . 2,5 балла
4) Получено, что $D/d = 1{,}2$ . . . . 3 балла

Указание проверяющим:
1) В пп. 2 и 3 недостаточно просто написать $p_1 = p_2$. Необходимо выразить давления через m, диаметры/радиусы сосудов и плотности.
2) Во всех пунктах допустимо вместо диаметров использовать радиусы сосудов.

Задача 8.4. Эксперименты с грузиками.

Готовясь к экспериментальному туру олимпиады по физике, мальчик Паша взял рычаг, снабжённый сантиметровыми делениями и способный вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, соответствующей делению «35», и два грузика с массами m_1 и m_2. Положив грузик m_1 на деление «64», Паша обнаружил, что рычаг находится в равновесии, если второй грузик поместить на деление «9». Когда же мальчик передвинул первый грузик на деление «54», второй грузик для восстановления равновесия пришлось сместить на деление «21».

1. Найдите отношение m_1/m_2.
2. Определите, на какое деление Паше нужно поместить грузик m_2, чтобы рычаг оказался в равновесии, если грузик m_1 он переложил на деление «19».

Размерами грузиков можно пренебречь. Трение в оси рычага отсутствует.

Ответ: 1) 1,2; 2) 63.

Решение: 1. Запишем правило моментов относительно оси для первого случая, учитывая момент силы тяжести $M_{тяж}$, действующей на рычаг:

$$m_1 g(64\text{ см} - 35\text{ см}) = m_2 g(35\text{ см} - 9\text{ см}) + M_{тяж} \quad \Rightarrow \quad 29m_1 = 26m_2 + M_{тяж}/(g \cdot 1\text{ см}).$$

Во втором случае

$$m_1(54 - 35) = m_2(35 - 21) + M_{тяж}/(g \cdot 1\text{ см}) \quad \Rightarrow \quad 19m_1 = 14m_2 + M_{тяж}/(g \cdot 1\text{ см}).$$

Вычтем оба уравнения друг из друга и получим, что

$$10m_1 = 12m_2 \quad \Rightarrow \quad m_1/m_2 = 1{,}2.$$

2. Пусть N — деление, на которое нужно положить груз m_2 в третьем случае. Снова запишем правило моментов относительно оси:

$$m_1(35 - 19) + M_{тяж}/(g \cdot 1\text{ см}) = m_2(N - 35).$$

Сложим это уравнение с первым:

$$29m_1 + 16m_1 = m_2(N - 35) + 26m_2 \quad \Rightarrow \quad 45m_1 = m_2(N - 9) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}2 \cdot 45 = N - 9 \quad \Rightarrow \quad N = 9 + 1{,}2 \cdot 45 = 63.$$

Критерии:

1) Идея о том, что есть момент силы тяжести, который необходимо учитывать . . . . 1 балл
2) Правильно записано первое правило моментов . . . . 1,5 балла
3) Правильно записано второе правило моментов . . . . 1,5 балла
4) Правильно записано третье правило моментов (для ответа на второй вопрос задачи) . . . . 2 балла
5) Найдено, что $m_1/m_2 = 1{,}2$ . . . . 2 балла
6) Найден правильный ответ на второй вопрос . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

Если за какой-либо из пунктов 2-4 поставлены баллы, балл за п. 1 ставится автоматически.

Максимально возможный балл в 8 классе 40

9 класс

Задача 9.1. Таков путь!

Одновременно с тем, как первое тело, находившееся на поверхности земли, бросили вертикально вверх, второе тело, находившееся на высоте $H = 7$ м, отпустили без начальной скорости. В некоторый момент времени оба тела столкнулись, не долетев до земли, причём второе тело прошло **путь**, в 1,8 раза больший, чем первое. Определите начальную скорость первого тела. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2, сопротивлением воздуха и размерами тел пренебречь.

Ответ: 6,83 м/с.

Решение: Пусть s — путь, пройденный первым тело до столкновения, а $1{,}8s$ — путь, пройденный, соответственно, вторым телом, причём $1{,}8s = gt^2/2$, где t — время, прошедшее до их столкновения. С другой стороны

$$H - 1{,}8s = vt - \frac{gt^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{H}{v},$$

где v — искомая начальная скорость первого тела.

Рассмотрим два случая: 1) первое тело столкнулось со вторым до того, как первое тело достигло верхней точки своей траектории; 2) столкновение произошло после прохождения первым телом верхней точки своей траектории.

1. В первом случае путь, пройденный первым телом, совпадает с модулем его перемещения. Отсюда

$$H = s + 1{,}8s \quad \Rightarrow \quad s = H/2{,}8 = 2{,}5 \text{ м}.$$

Определим t и v

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}8s}{g}} = \sqrt{\frac{9 \text{ м}}{10 \text{ м/с}^2}} \approx 0{,}95 \text{ с}, \qquad v = \frac{H}{t} \approx 7{,}38 \text{ м/с}.$$

Однако найденной скорости v соответствует время подъёма $t_{\text{под}} = v/g \approx 0{,}738 \text{ с} < t$. Это значит, что первый случай не допускается условием задачи.

2. Во втором случае первое тело столкнулось со вторым через время $(t - v/g)$ после прохождения им верхней точки. Следовательно, путь, пройденный первым телом, равен

$$s = \frac{v^2}{2g} + \frac{g}{2} \cdot \left(t - \frac{v}{g}\right)^2 = \frac{v^2}{g} + \frac{gt^2}{2} - vt = \frac{v^2}{g} + 1{,}8s - H \quad \Rightarrow \quad 0{,}8s + \frac{v^2}{g} - H = 0.$$

Так как $1{,}8s = gt^2/2 = gH^2/(2v^2)$, получим следующее уравнение:

$$\frac{2gH^2}{9v^2} + \frac{v^2}{g} - H = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{9x} + x - 1 = 0, \text{ где } x = \frac{v^2}{gH},$$

решение которого — $x_1 = 1/3$ и $x_2 = 2/3$. Первый найденный корень необходимо отбросить, поскольку тела, по условию, сталкиваются ещё в полёте:

$$t = H/v < 2v/g \quad \Rightarrow \quad 1/2 < x.$$

Отсюда получим, что начальная скорость первого тела должна быть равна

$$v = \sqrt{2gH/3} = \sqrt{140/3} \text{ м/с} \approx 6{,}83 \text{ м/с}.$$

Критерии:

1) Показано, что в первом случае решения нет . . . . . 2 балла
2) Формула $H = vt$ или аналог . . . . . 1 балл
3) Формула $1{,}8s = gt^2/2$ или аналог . . . . . 0,5 балла
4) Верная формула для пути s, пройденного нижним телом . . . . . 1,5 балла
5) Получено верное уравнение для нахождения v . . . . . 1,5 балла
6) Получены верные решения уравнения из пункта 5 . . . . . 1 балл
7) Обоснованно выбран верный корень уравнения из пункта 5 . . . . . 1 балл
8) Найдено значение начальной скорости $v \approx 6{,}83$ м/с . . . . . 1,5 балла

Указание проверяющим:

1) В отсутствие баллов за п. 1 остальные пункты оцениваются независимо.
2) Уравнение в п. 5 должно содержать только v и известные величины.
3) Если нефизичный корень в п. 7 отброшен без обоснования, баллы за ответ (п. 8) не ставить.

Задача 9.2. Куб с полостью.
Если полый пластмассовый куб (в полости находится воздух) удерживается в воде с помощью нити, привязанной ко дну сосуда (рис. 9.1а), сила натяжения этой нити равна $T_1 = 56$ Н. Если же полость куба полностью заполнить водой и, подвесив на нити, наполовину погрузить в воду (рис. 9.1б), сила натяжения нити будет равна $T_2 = 44$ Н. Какова толщина стенок этого куба? Плотность воды равна 1000 кг/м^3, плотность пластмассы — 1200 кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Толщина стенок везде одинакова.

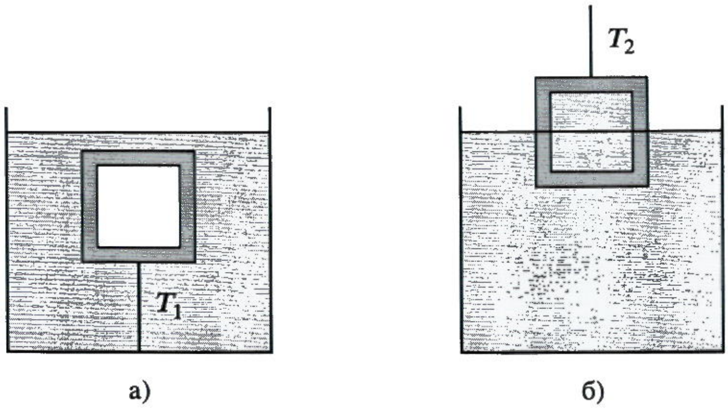


Рис. 9.1.

Ответ: 9 мм.

Решение: Пусть V — внешний объём куба, а $V_п$ — объём его полости. В первом случае

$$T_1 = \rho_в g V - \rho_{пл} g (V - V_п),$$

а во втором —

$$T_2 = \rho_{пл} g (V - V_п) + \rho_в g V_п - \rho_в g V/2.$$

Складывая эти два равенства, получим

$$V_п + V/2 = (T_1 + T_2)/(\rho_в g) = 10000 \text{ см}^3.$$

Выразим отсюда $V_п$ и подставим в первое равенство:

$$T_1 = \rho_в g V - \rho_{пл} g \left(3V/2 - 10000 \text{ см}^3\right) \quad \Rightarrow \quad \rho_{пл} g \cdot 10000 \text{ см}^3 - T_1 = gV(3/2 \cdot \rho_{пл} - \rho_в) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\rho_{пл} g \cdot 10000 \text{ см}^3 - T_1}{g(3/2 \cdot \rho_{пл} - \rho_в)} = \frac{120 \text{ Н} - 56 \text{ Н}}{10 \text{ м/с}^2 \cdot 800 \text{ кг/м}^3} = 8000 \text{ см}^3.$$

Объём полости, соответственно, равен $V_п = 10000 \text{ см}^3 - V/2 = 6000 \text{ см}^3$.

Чтобы найти толщину стенок куба d, вычислим длину его ребра $a = \sqrt[3]{8000 \text{ см}^3} = 20 \text{ см}^3$ и длину ребра полости $b = \sqrt[3]{6000 \text{ см}^3} \approx 18{,}2$ см. Отсюда

$$d = (a - b)/2 \approx 0{,}9 \text{ см}.$$

Критерии:

1) Записано выражение $T_1 = \rho_в g V - \rho_{пл} g (V - V_п)$ или аналог . . . . 1 балл
2) Записано выражение $T_2 = \rho_{пл} g (V - V_п) + \rho_в g V_п - \rho_в g V/2$ или аналог . . . . 1,5 балла
3) Найдено верное значение объёма куба . . . . 2 балла
4) Найдено верное значение объёма полости . . . . 2 балла
5) Найдено верное значение ребра куба a . . . . 1 балл
6) Найдено верное значение ребра полости b . . . . 1 балл
7) Найдено верное значение d . . . . 1,5 балла

Задача 9.3. Лёд в керосине.

Экспериментируя в школьной лаборатории, мальчик Паша взял пустой теплоизолированный калориметр ёмкостью 100 см^3 и налил туда 98 см^3 горячего керосина. Затем он взял кусок льда при температуре 0 ℃ и аккуратно, но быстро поместил его в калориметр. Дождавшись наступления теплового равновесия, Паша обнаружил, что весь лёд растаял, температура керосина опустилась до 0 ℃, а суммарный объём содержимого калориметра снова стал равен 98 см^3. Чему была равна начальная температура керосина? Удельная теплоёмкость керосина равна 2100 Дж/(кг·℃), удельная теплота плавления льда — 330 кДж/кг. Плотности воды, льда и керосина, соответственно, равны 1000 кг/м^3, 900 кг/м^3 и 800 кг/м^3. Теплоёмкостью калориметра и тепловым расширением керосина пренебречь.

Ответ: 44,2 ℃.

Решение: Превращаясь с воду, лёд уменьшает свой объём на 10%. Это значит, что для удовлетворения условию задачи, Паша должен положить в калориметр такой кусочек льда, чтобы часть керосина вылилась из сосуда. Пусть V — объём льда ($V > 2$ см^3). Тогда объём оставшегося в калориметре керосина будет равен (100 см$^3 - V$). При таянии льда его объём станет $\rho_л V/\rho_в = 0{,}9V$, а общий объём содержимого уменьшится до 98 см^3, поэтому

$$100\ \text{см}^3 - V + 0{,}9V = 98\ \text{см}^3 \quad \Rightarrow \quad 0{,}1V = 2\ \text{см}^3 \quad \Rightarrow \quad V = 20\ \text{см}^3.$$

Пусть t — начальная температура керосина. Запишем уравнение теплового баланса для содержимого калориметра:

$$c_к\rho_к \cdot 80\ \text{см}^3(t - 0\,℃) = \lambda\rho_л \cdot 20\ \text{см}^3 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\lambda\rho_л \cdot 20\ \text{см}^3}{c_к\rho_к \cdot 80\ \text{см}^3} = \frac{330000\ \text{Дж/кг} \cdot 900\ \text{кг/м}^3}{2100\ \text{Дж/(кг}\cdot℃) \cdot 800\ \text{кг/м}^3 \cdot 4} \approx 44{,}2\,℃.$$

Критерии:

1) Идея о том, что при погружении льда часть керосина выливается . . . . 2 балла
2) Записана формула для объёма керосина (100 см$^3 - V$) . . . . 1 балл
3) Найдено, что объём льда равен 20 см^3 . . . . 2 балла
4) Правильно записано уравнение теплового баланса . . . . 3 балла
5) Найдена начальная температура керосина $t \approx 44{,}2$ ℃ . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

Уравнении теплового баланса (п. 4) должно включать правильные значения объёма/массы керосина и льда, иначе баллы за этот пункт не ставятся.

Задача 9.4. Переплывающее равновесие.

На однородную доску массой $M = 1{,}5$ кг, лежащую своими краями на двух опорах, положили симметричный прямоугольный сосуд такой же массы, в котором находится ледяной кубик массой $m = 900$ г. Длина сосуда равна половине длины доски, а его правый край совпадает с краем доски. Вначале лёд находится вплотную к правому краю сосуда (см. рис. 9.2). Определите длину доски L, если после того как весь лёд растаял, сила давления доски на левую опору увеличилась на 15%. Плотность льда равна 900 кг/м^3. Толщиной стенок сосуда можно пренебречь, вода из сосуда не выливается.

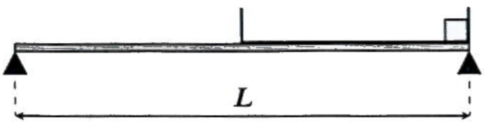


Рис. 9.2.

Ответ: 92 см.

Решение: Пусть a — длина ребра ледяного куба. Тогда

$$a^3 = m/\rho_л = 1000\ см^3 \quad\Rightarrow\quad a = 10\ см.$$

Рассмотрим силы, действующие на систему «доска-сосуд-кубик» до того, как лёд растает (рис. 9.3а), и после таяния (рис. 9.3б). Запишем в каждом случае правило моментов относительно правой опоры:

$$\text{(до таяния)} \qquad N_1 L = Mg\cdot\frac{L}{2} + Mg\cdot\frac{L}{4} + mg\cdot\frac{a}{2},$$

$$\text{(после таяния)} \qquad N_1' L = Mg\cdot\frac{L}{2} + (M+m)g\cdot\frac{L}{4}.$$

Так как $N_1' = 1{,}15N_1$,

$$1{,}15Mg\cdot\frac{3L}{4} + 1{,}15mg\cdot\frac{a}{2} = Mg\cdot\frac{3L}{4} + mg\cdot\frac{L}{4} \quad\Rightarrow\quad L\,(m - 0{,}45M) = 2{,}3am \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{2{,}3ma}{m - 0{,}45M} = \frac{0{,}9\ кг\cdot 23\ см}{0{,}9\ кг - 0{,}675\ кг} = 92\ см.$$

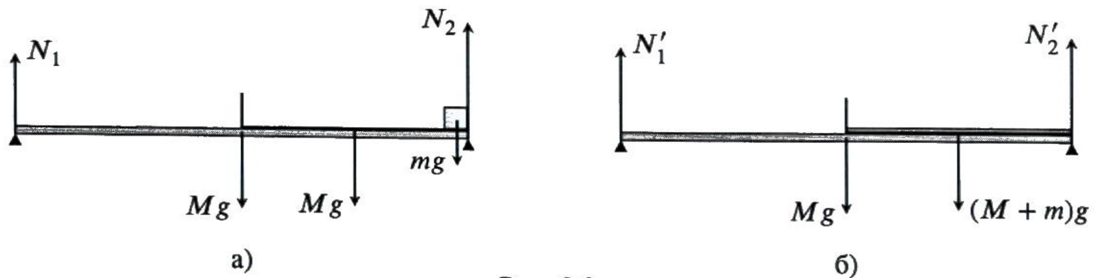


Рис. 9.3.

Критерии:

1) Найдена длина ребра кубика льда (10 см) . . . . 0,5 балла
2) Идея о том, что сила тяжести для сосуда приложена к его середине . . . . . . 1 балл
3) Идея о том, что сила тяжести для кубика приложена к его середине . . . . . . 1 балл
4) Идея о том, что сила тяжести для слоя воды приложена к его середине . . . . . . 1 балл
5) Правильно записано правило моментов для первого случая (когда лёд твёрдый) . . . . . . 2 балла
6) Правильно записано правило моментов для второго случая (когда лёд растаял) . . . . . . 2 балла
7) Найдено значение $L = 92$ см . . . . 2,5 балла

Указание проверяющим:

1) В пунктах 2-4 достаточно чертежа, на котором изображена соответствующая сила, или указания правильного значения плеча этой силы в правиле моментов.

2) Если поставлены баллы за п. 5, баллы за пункты 2 и 3 ставятся автоматически. Аналогично, если поставлены баллы за п. 6, должны стоять баллы за пп. 2 и 4.

3) В пп. 5 и 6 правило моментов должно содержать расписанные формулы для моментов всех необходимых сил.

Задача 9.5. Большая цепь.

В цепи, изображённой на рис. 9.4, все резисторы имеют одинаковые сопротивления, а амперметр и вольтметр идеальны. К точкам M и N прикладывают постоянное напряжение, в результате чего амперметр показывает 75 мА, а вольтметр — 5,5 В. Найдите общее сопротивление цепи между точками M и N.

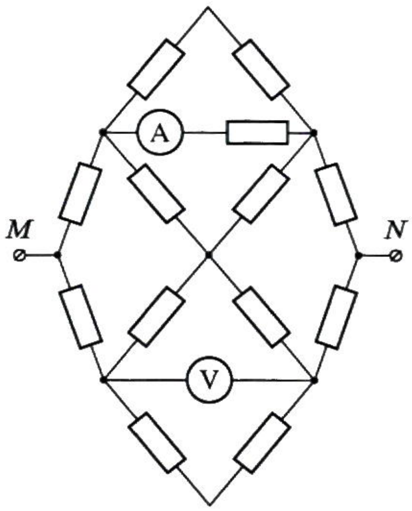


Рис. 9.4.

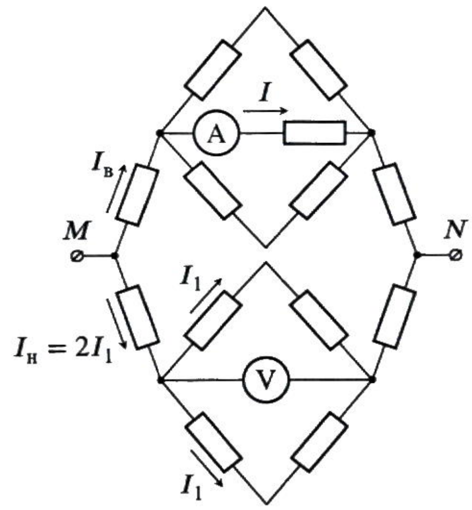


Рис. 9.5.

Ответ: 60 Ом.

Решение: Заметим, что данная цепь является симметричной относительно вертикальной (по рисунку) оси, проходящей через её центр. Поэтому ток из верхней части цепи не перетекает в её нижнюю часть, и цепь в её центральной точке можно разорвать так, как показано на рис. 9.5.

Пусть r — сопротивление каждого резистора в цепи, U — напряжение на вольтметре, а I — сила тока через амперметр. Сила тока через резисторы, параллельные вольтметру, равна $I_1 = U/(2r)$. Следовательно, сила тока, зашедшего в нижнюю часть цепи, равна $I_н = 2I_1 = U/r$, а напряжение между точками M и N равно $U_{MN} = 2I_1 r + U + 2I_1 r = 3U$.

Сопротивление верхней половины цепи составляет $R_в = r + r/2 + r = 5r/2$, поэтому сила тока, зашедшего в верхнюю часть, равна $I_в = U_{MN}/R_в = 6U/(5r)$. Запишем теперь связь между током через амперметр и U:

$$I = \frac{I_в}{2} = \frac{3U}{5r} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{3U}{5I} = \frac{3 \cdot 5{,}5\ \text{В}}{5 \cdot 0{,}075\ \text{А}} = 44\ \text{Ом}.$$

Соответственно, сопротивление верхней части цепи равно $R_в = 5r/2 = 110$ Ом, а сопротивление нижней — $R_н = 3r = 132$ Ом. Общее сопротивление цепи составляет

$$R_{MN} = \frac{R_в R_н}{R_в + R_н} = \frac{110 \cdot 132}{242}\ \text{Ом} = 60\ \text{Ом}.$$

Критерии:

1) Правильно сделан разрыв цепи в центральной точке . . . . 1,5 балла
2) Все токи в нижней части цепи корректно выражены через одну величину . . . . 1 балл
3) Все токи в верхней части цепи корректно выражены через одну величину . . . . 1,5 балла
4) Найдена правильная связь между напряжением между точками M и N и показанием вольтметра . . 2 балла
5) Найдена правильная связь между показаниями приборов и сопротивлением резисторов . . . . 2 балла
6) Найдено сопротивление цепи между точками M и N (60 Ом) . . . . 2 балла

Указания проверяющим:

1) Когда участник использует при решении законы Кирхгофа «в лоб» (не разрывая цепь в центральной точке), балл за п.1 ставится в том случае, если поставлены баллы за пп 4 и/или 5.

2) Если участник получил правильный ответ иным корректным способом, альтернативном авторскому, решение оценивается полным баллом.

Максимально возможный балл в 9 классе 50

10 класс

Задача 10.1. Движемся вместе.

На горизонтальной ледяной поверхности находятся два бруска, один на другом (рис. 10.1). Нижний брусок имеет массу $2m$, а верхний — массу m. К верхнему бруску прикладывают постоянную горизонтальную силу F. При каких значениях F бруски будут двигаться направо, не смещаясь друг относительно друга? Ускорение свободного падения равно g. Коэффициент трения нижнего бруска о лёд равен 0,1, а коэффициент трения между брусками — 0,4. Сопротивлением воздуха пренебречь.

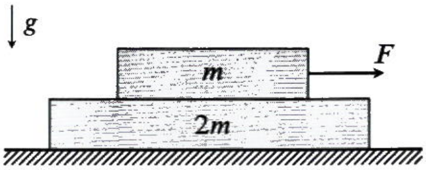


Рис. 10.1.

Ответ: $0{,}3mg < F < 0{,}45mg$.

Решение: Пусть μ — коэффициент трения нижнего бруска о лёд. Если оба бруска движутся вместе, их можно рассматривать как одно тело массой $3m$. Оно под действием силы F придёт в движение при условии, что

$$F > \mu \cdot 3mg \qquad \Rightarrow \qquad F > 0{,}3mg.$$

Ускорение системы будет равно $a = (F - 0{,}3mg)/(3m)$.

Запишем теперь 2й закон Ньютона для верхнего бруска:

$$ma = F - F_{\text{тр}} \qquad \Rightarrow \qquad F_{\text{тр}} = F - ma = F - \frac{F - 0{,}3mg}{3} = \frac{2F}{3} + 0{,}1mg.$$

Пусть μ' — коэффициент трения между брусками. Верхний брусок не будет двигаться по нижнему, если

$$F_{\text{тр}} < \mu' mg \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2F}{3} + 0{,}1mg < 0{,}4mg \qquad \Rightarrow \qquad F < 0{,}45mg.$$

Отсюда получим, что бруски будут двигаться, не смещаясь относительно друг друга, при следующих значениях F:

$$0{,}3mg < F < 0{,}45mg.$$

Критерии:

1) Записано условие $F > 0{,}3mg$ или его аналог . . . . 1 балл
2) Записан второй закон Ньютона для обоих тел, как единого целого . . . . 2 балла
3) Записан второй закон Ньютона для верхнего тела . . . . 2 балла
4) Указано, что сила трения между брусками $F_{\text{тр}} < 0{,}4mg$ . . . . 1 балл
5) Найдено, что $F < 0{,}45mg$ . . . . 3 балла
6) Записан ответ $0{,}3mg < F < 0{,}45mg$ или его аналог . . . . 1 балл

Указания проверяющим:

1) Во всех приведённых неравенствах различие между парами знаков: $<$ и $\leqslant$, $>$ и $\geqslant$, — считать физически несущественным.
2) Если в пункте 2 (или 3) вместо указанного в критериях, верно записан 2-й закон Ньютона для нижнего тела, баллы за соответствующий пункт ставятся.
3) Балл за пункт 6 не ставится, если не указано, что неравенства из пп. 1 и 5 должны выполняться одновременно.

Задача 10.2. Прыг-скок.

Тело, брошенное под углом α к горизонту с одного края прямоугольной ямы, падает на другой её край (см. рис. 10.2). Если же, не меняя угол и место броска, уменьшить начальную скорость тела в три раза, оно, один раз упруго отскочив от плоского дна ямы, снова попадёт на её противоположный край. Чему равна глубина ямы H, если её длина равна L? Сопротивлением воздуха и размерами тела пренебречь.

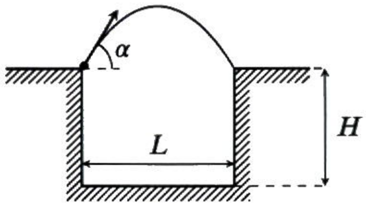


Рис. 10.2.

Ответ: $\dfrac{7L\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4}$.

Решение: Пусть v — начальная скорость тела. Тогда

$$L = \frac{2v^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{gL}{2\sin\alpha\cos\alpha}}.$$

Если начальная скорость тела уменьшится втрое, оно должно попасть в точку на середине дна ямы:

$$\frac{L}{2} = \frac{v}{3}\cdot t\cos\alpha, \qquad -H = \frac{v}{3}\cdot t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

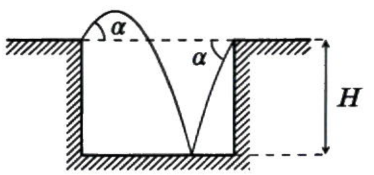
Выразив из первого уравнения время t, получим

$$-H = \frac{L}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2}\cdot\frac{9L^2}{4v^2\cos^2\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad -H = \frac{L}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2}\cdot\frac{9L^2\sin\alpha}{2gL\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad H = \frac{7L}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Критерии:

1) Записана формула $L = 2v^2\sin\alpha\cos\alpha/g$ или её аналог . . . . 1 балл
2) Записана формула $L/2 = vt\cos\alpha/3$ или её аналог . . . . 3 балла
3) Записана формула $-H = vt\sin\alpha/3 - gt^2/2$ или её аналог . . . . 3 балла
4) Найдено, что $H = 7L\,\mathrm{tg}\,\alpha/4$ . . . . 3 балла

Уточнение по задаче 10.2:
Помимо траектории, рассмотренной в авторском решении, существует ещё одна возможность телу после единственного отскока попасть **в** противоположный край ямы (см. рис.).



В условии задачи требуется найти глубину ямы H, при которой тело «снова попадёт **на** её противоположный край», а не «**в** край». Поэтому, чтобы не вдаваться с учащимися в филологические дискуссии, задача должна оцениваться следующим образом:
1) Если учащийся рассмотрел только авторский вариант траектории тела, жюри использует исходные критерии.
2) Если учащийся рассмотрел только второй вариант, он оценивается согласно критериям, приведённым ниже.
3) Если учащийся рассмотрел оба варианта, оценивается лучший.

Краткое решение для второго случая:
Пусть t_1 и t_2 — времена движения тела до и после отскока соответственно, а v — начальная скорость тела. Тогда

$$L = \frac{2v^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{gL}{2\sin\alpha\cos\alpha}},$$

$$L = \frac{v}{3}\cdot(t_1+t_2)\cos\alpha, \qquad -H = \frac{v}{3}\cdot t_1\sin\alpha - \frac{gt_1^2}{2}, \qquad -H = -\frac{v}{3}\cdot t_2\sin\alpha - \frac{gt_2^2}{2}.$$

Комбинируя найденные выражения, получим

$$t_1+t_2 = \frac{6v\sin\alpha}{g}, \qquad t_1-t_2 = \frac{2v\sin\alpha}{3g} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{10v\sin\alpha}{3g},\ t_2 = \frac{8v\sin\alpha}{3g}.$$

Отсюда

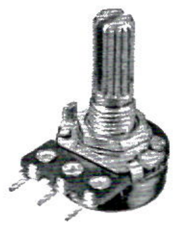
$$H = -\frac{v}{3}\cdot t_1\sin\alpha + \frac{gt_1^2}{2} = -\frac{10v^2\sin^2\alpha}{9g} + \frac{g}{2}\cdot\frac{100v^2\sin^\alpha}{9g^2} = \frac{40v^2\sin^2\alpha}{9g} = \frac{20L}{9}\operatorname{tg}\alpha.$$

Критерии:
5) Записана формула $L = 2v^2\sin\alpha\cos\alpha/g$ или её аналог . . . . 1 балл
6) Записана формула $L = v(t_1+t_2)\cos\alpha/3$ или её аналог . . . . 3 балла
7) Записана формула $-H = \frac{v}{3}\cdot t_1\sin\alpha - \frac{gt_1^2}{2}$ или её аналог . . . . 1,5 балла
8) Записана формула $-H = -\frac{v}{3}\cdot t_2\sin\alpha - \frac{gt_2^2}{2}$ или её аналог . . . . 1,5 балла
9) Найдено, что $H = 20L\operatorname{tg}\alpha/9$ . . . . 3 балла

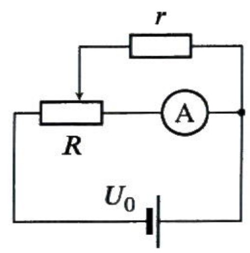
Задача 10.3. Делитель напряжения.

Потенциометром (рис. 10.3а) называется резистор, снабжённый дополнительным скользящим контактом (ему соответствует средний вывод устройства), который на схемах условно обозначается стрелкой. Вращением ручки потенциометра можно изменять сопротивление между средним и каким-либо другим выводом, в идеальном случае, от нуля до максимального значения R.

Готовясь к экспериментальному туру по физике, мальчик Паша собрал цепь, состоящую из источника постоянного напряжения, резистора, потенциометра и амперметра (рис. 10.3б). Вращая ручку потенциометра, Паша заметил, что сила тока через амперметр меняется, причём минимальное показание прибора равно $I_{min} = 2$ мА, а максимальное — $I_{max} = 5$ мА. Найдите напряжение источника U_0 и максимальное сопротивление потенциометра R, если сопротивление резистора $r = 200$ Ом. Амперметр, потенциометр и источник считайте идеальными.



а)



б)

Рис. 10.3.

Ответ: 6 В, 1200 Ом.

Решение: Пусть xR — сопротивление потенциометра между средним и правым (по схеме на рис. б) контактом, а $(1-x)R$ — соответственно, сопротивление между средним и левым контактом, где x может принимать значения от 0 до 1. Если сила тока через амперметр равна I, то сила тока через резистор r составит $I_r = xRI/r$, а сила тока через источник — $I_0 = I(1 + xR/r)$. Найдём общее напряжение в цепи и приравняем его U_0:

$$I_0(1-x)R + I \cdot xR = U_0 \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{U_0/R}{(1-x)(1+xR/r)+x} = \frac{U_0/R}{1+(x-x^2)R/r}.$$

В знаменателе полученного выражения находится квадратный трёхчлен, максимальное значение которого соответствует минимальному значению I и наоборот. Своего максимального значения этот трёхчлен достигает в точке $x = 1/2$ (вершина параболы), а минимального — при $x = 0$ или $x = 1$ (при крайних значениях x). Таким образом,

$$I_{min} = \frac{U_0/R}{1+R/(4r)}, \qquad I_{max} = U_0/R.$$

Отсюда

$$1 + \frac{R}{4r} = \frac{I_{max}}{I_{min}} = 2{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad R = 6r = 1200 \text{ Ом},$$

$$U_0 = I_{max}R = 0{,}005 \text{ А} \cdot 1200 \text{ Ом} = 6 \text{ В}.$$

Критерии:

1) Найдена связь между током через амперметр и током через резистор r . . . . . 1 балл
2) Записано уравнение $I_0(1-x)R + I \cdot xR = U_0$ или его аналог . . . . . 1 балл
3) Получена зависимость силы тока через амперметр I от положения движка потенциометра . . . . . 2 балла
4) Указано, что максимальное значение I достигается в крайнем положении . . . . . 1 балл
5) Найдено, что минимальное значение I достигается в среднем положении . . . . . 2 балла
6) Найдено значение $R = 1200$ Ом . . . . . 1,5 балла
7) Найдено значение $U_0 = 6$ В . . . . . 1,5 балла

Указание проверяющим:

1) В формулах для пп. 1-3 могут быть использованы иные обозначения, отличные от авторских.
2) Зависимость в п. 3 должна содержать только r, R, U_0 и переменную, связанную с положением движка потенциометра.
3) Если за п. 3 выставлены баллы, то баллы за пп. 1 и 2 ставятся автоматически.
4) В п. 5 утверждение, что минимальное I соответствует среднему положению движка, должно быть пусть и кратко, но обосновано (с помощью свойств параболы, с помощью вычисления производной и т.п.). В противном случае баллы в п. 5 не ставить (ответ считается «угаданным»).
5) Если п. 5 не оценён, не ставятся баллы и за ответы в пп. 6 и 7.

Задача 10.4. Преломление в полусфере.

На плоском столе находится прозрачная полусфера радиуса $R = 10$ см с показателем преломления $n = \sqrt{2}$. На неё вдоль поверхности стола на высоте $h = R/\sqrt{2}$ падает световой луч (рис. 10.4). Определите, на каком расстоянии s от поверхности полусферы луч попадёт на стол. Показатель преломления воздуха, окружающего полусферу, примите равным единице.

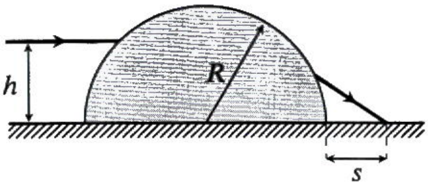


Рис. 10.4.

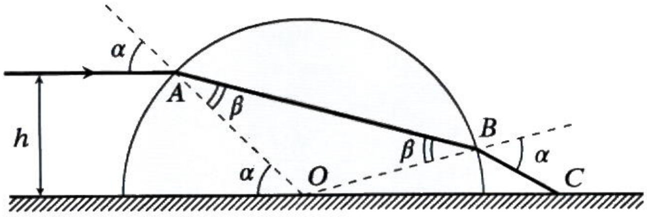


Рис. 10.5.

Ответ: 4,1 см.

Решение: Построим ход луча в полусфере (рис. 10.5). Так как $h = R/\sqrt{2}$, угол падения в точке A равен $\alpha = 45^\circ$. Из закона Снеллиуса найдём угол преломления β:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 30^\circ.$$

Треугольник $\triangle AOB$ является равнобедренным ($AO = BO = R$), поэтому $\angle OBA = \angle OAB = \beta = 30^\circ$. Соответственно, угол, под которым луч выходит из полусферы, снова равен $\alpha = 45^\circ$.

Рассмотрим теперь $\triangle BOC$ и найдём его углы:

$$\angle OBC = 180^\circ - \alpha = 135^\circ, \qquad \angle BOC = 2\beta - \alpha = 15^\circ, \qquad \angle BCO = \alpha - \angle BOC = 30^\circ.$$

Запишем теперь для этого треугольника теорему синусов, учитывая, что $OC = R + s$:

$$\frac{R+s}{\sin 135^\circ} = \frac{R}{\sin 30^\circ} \qquad \Rightarrow \qquad s = R(\sqrt{2} - 1) \approx 4{,}1 \text{ см}.$$

Критерии:

1) Записано, что угол падения луча на полусферу равен 45° . . . . 0,5 балла
2) Найдено, что угол преломления луча в полусфере равен 30° . . . . 0,5 балла
3) Найдено, что $\angle OBA = \angle OAB$ . . . . 1 балл
4) Найдены правильные значения углов $\triangle BOC$ . . . . 1 балл
5) Правильно записано уравнение (или система уравнений), необходимое для нахождения s . . . . 3 балла
6) Найдено, что $s = R(\sqrt{2} - 1)$ . . . . 3 балла
7) Найдено, что $s \approx 4{,}1$ см . . . . 1 балл

Указание проверяющим:

1) Обозначения точек и/или углов могут не совпадать с приведёнными в авторском решении.
2) Пункты 1, 3, 4 критериев могут находиться внутри различных уравнений или быть указаны на чертежах.
3) Если значение s сразу записано в виде верного числа, то баллы за п. 6 ставить автоматически.

Задача 10.5. Поворот с ускорением.
Экспериментатор Иннокентий Иванов на своём полноприводном автомобиле хочет совершить следующий манёвр: стартовав из точки A (см. рис. 10.6) и разгоняясь по дуге AB, равной 90°, попасть в точку B. Скорость автомобиля в процессе движения меняется по закону $v = at$, где a — постоянная, называемая касательным ускорением, t — время, прошедшее от старта в точке A. Считая, что автомобиль Иннокентия всё время движется по горизонтальной поверхности, определите максимально возможное значение касательного ускорения a, при котором машина удержится на дуге AB. Коэффициент трения между колёсами и поверхностью равен μ, ускорение свободного падения — g. Сопротивлением воздуха пренебречь.

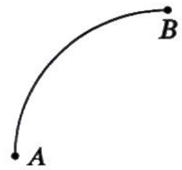


Рис. 10.6.

Ответ: $\mu g/\sqrt{1+\pi^2}$.

Решение: Пусть R — радиус дуги AB, тогда её длина равна $L = \pi R/2$. Так как автомобиль Иннокентия двигается по ней с постоянным касательным ускорением, $L = at^2/2$, где t — время манёвра. Приравнивая записанные выражения, получим

$$\pi R = at^2.$$

При совершении указанного в условии манёвра полное ускорение автомобиля обеспечивается действующей на него силой трения, максимальное значение которой равно $(F_{\text{тр}})_{max} = \mu mg$. Откуда следует, что максимально допустимое значение полного ускорения $a_{\text{полн}} = \mu g$. С другой стороны, полное ускорение автомобиля есть геометрическая сумма двух взаимно перпендикулярных компонент — касательного и центростремительного ускорений:

$$a^2_{\text{полн}} = a^2 + (v^2/R)^2.$$

Так как a и R не меняются в процессе движения, полное ускорение будет наибольшим в точке B:

$$a^2_{\text{полн}\,B} = a^2 + (a^2t^2/R)^2 = a^2 + (a\pi)^2 = a^2(1+\pi^2) \qquad \Rightarrow \qquad a_{\text{полн}\,B} = a\sqrt{1+\pi^2}.$$

Поскольку максимально возможное полное ускорение равно μg, соответствующее ему максимально возможно касательное ускорение равно

$$a_{max} = \frac{\mu g}{\sqrt{1+\pi^2}}.$$

Критерии:

1) Записано уравнение $\pi R = at^2$ или аналог . . . . 2 балла
2) Использована формула $a_{\text{полн}} = \sqrt{a^2 + v^4/R^2}$ или её аналог . . . . 2 балла
3) Записано, что максимальное значение полного ускорения равно μg . . . . 1,5 балла
4) Найдена величина полного ускорения в точке B ($a_{\text{полн}\,B} = a\sqrt{1+\pi^2}$) . . . . 3 балла
5) Получен правильный ответ . . . . 1,5 балла

Указание проверяющим:
1) В п. 3 важно, чтобы речь шла именно о **полном** ускорении автомобиля. Просто формула $a = \mu g$ оценивается в ноль баллов.
2) Формула для полного ускорения (п. 2) может быть не написана явно, а сразу использована при подсчёте $a_{\text{полн}\,B}$. Если она использована корректно, баллы за п. 2 ставить.

Максимально возможный балл в 10 классе 50

11 класс

Задача 11.1. Тело на клине.

С каким горизонтальным ускорением a нужно двигать клин, чтобы маленький брусок, находящийся на его поверхности (рис. 11.1), оставался относительно клина неподвижным? Угол при основании клина равен α ($\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$), коэффициент трения между бруском и поверхностью равен $\mu = 0{,}2$. Сопротивление воздуха отсутствует. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

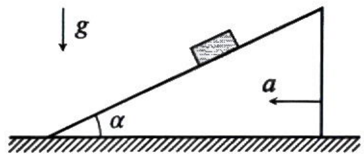


Рис. 11.1.

Ответ: $2{,}7$ м/с$^2 < a < 7{,}8$ м/с^2.

Решение: Пусть m — масса бруска. Перейдём в неинерциальную систему отсчёта клина и изобразим силы, действующие на брусок в этой системе: силу тяжести mg, фиктивную силу инерции ma, силу реакции опоры N и силу трения $F_{тр}$ (рис. 11.2). Последняя, для определённости, направлена вверх по поверхности клина. Запишем 2й закон Ньютона в данной системе отсчёта, спроектировав все силы на оси Ox (вдоль поверхности клина) и Oy (в перпендикулярном направлении):

$$0 = F_{тр} + ma\cos\alpha - mg\sin\alpha, \qquad 0 = N - ma\sin\alpha - mg\cos\alpha.$$

Выражая отсюда $F_{тр}$ и N, получим

$$F_{тр} = m(g\sin\alpha - a\cos\alpha), \qquad N = m(a\sin\alpha + g\cos\alpha).$$

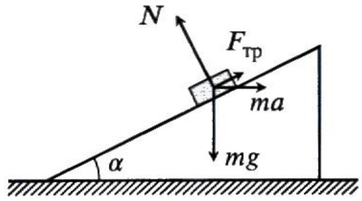


Рис. 11.2.

Брусок не движется по клину, если $-\mu N < F_{тр} < \mu N$. Следовательно,

$$-\mu < \frac{F_{тр}}{N} < \mu \quad \Rightarrow \quad -\mu < \frac{g\sin\alpha - a\cos\alpha}{a\sin\alpha + g\cos\alpha} < \mu \quad \Rightarrow \quad -\mu < \frac{g\operatorname{tg}\alpha - a}{a\operatorname{tg}\alpha + g} < \mu.$$

Решим получившиеся неравенства:

$$-\mu(a\operatorname{tg}\alpha + g) < g\operatorname{tg}\alpha - a \quad \Rightarrow \quad a < \frac{g(\operatorname{tg}\alpha + \mu)}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha} = \frac{7g}{9} \approx 7{,}8 \text{ м/с}^2,$$

$$\mu(a\operatorname{tg}\alpha + g) > g\operatorname{tg}\alpha - a \quad \Rightarrow \quad a > \frac{g(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}{1 + \mu\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3g}{11} \approx 2{,}7 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда $2{,}7$ м/с$^2 < a < 7{,}8$ м/с^2.

Критерии:

1) Правильно записан 2й закон Ньютона в проекции на одну из осей . . . . 2 балла
2) Правильно записан 2й закон Ньютона в проекции на другую ось . . . . 2 балла
3) Записано условие $|F_{тр}| < \mu N$ или его аналог . . . . 2 балла
4) Найдена правильная верхняя граница возможных ускорений . . . . 1,5 балла
5) Найдена правильная нижняя граница возможных ускорений . . . . 1,5 балла
6) Записан ответ $2{,}7$ м/с$^2 < a < 7{,}8$ м/с^2 или его аналог . . . . 1 балл

Указания проверяющим:

1) Во всех приведённых неравенствах различие между парами знаков: $<$ и $\leqslant$, $>$ и $\geqslant$, — считать физически несущественным.
2) В пп. 1 и 2 второй закон Ньютона может быть записан как в инерциальной, так и в неинерциальной системе отсчёта.
3) Участник может направить силу трения не вверх, а вниз по плоскости, что приведёт к систематическому изменению знака перед $F_{тр}$ во всех уравнениях (пп. 1 и 2). Это допустимо.
4) Если вместо неравенства, необходимого в п. 3, указано, что может быть два направления для максимальной силы трения, баллы в п. 3 ставить.
5) В пп. 4 и 5 числовые значения для ускорений необязательны.

Задача 11.2. Сбалансированная зарядка.

В цепи, изображённой на рис. 11.3, оба ключа разомкнуты, а конденсаторы не заряжены. Сначала замыкают ключ K_1, а затем, когда заряд на конденсаторе ёмкостью C станет равным $2C\mathscr{E}/3$, замыкают ключ K_2. Определите сопротивление резистора R и ёмкость правого конденсатора C_0, если после замыкания ключа K_2 токи через оба конденсатора одинаковы в каждый момент времени. Ёмкость левого конденсатора C, ЭДС батареи $\mathscr{E}$ и её внутреннее сопротивление r считайте известными.

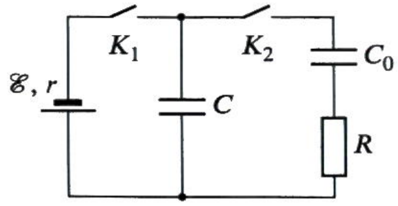


Рис. 11.3.

Ответ: $C_0 = C/3$, $R = 4r$.

Решение: Если после замыкания второго ключа токи через оба конденсатора одинаковы в каждый момент времени, то и заряды, перешедшие на конденсаторы от момента замыкания K_2 до прекращения зарядки, тоже должны быть равны. В установившемся режиме токи в цепи не текут, следовательно, напряжения на обоих конденсаторах равны $\mathscr{E}$, а заряды, соответственно,

$$q_{\text{уст}\,C} = C\mathscr{E}, \qquad q_{\text{уст}\,C0} = C_0\mathscr{E}.$$

Заряд, появившийся на левом конденсаторе с момента замыкания K_2, составил $\Delta q_C = q_{\text{уст}\,C} - 2C\mathscr{E}/3 = C\mathscr{E}/3$. Поскольку он должен быть равен заряду на C_0,

$$\Delta q_C = q_{\text{уст}\,C0} \quad \Rightarrow \quad \frac{C\mathscr{E}}{3} = C_0\mathscr{E} \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{C}{3}.$$

Рассмотрим теперь момент сразу после замыкания ключа K_2. Заряд, бывший на конденсаторах до замыкания, не успел поменяться, но при этом в цепи обоих конденсаторов появился ток I, а через батарейку, соответственно, течёт ток $2I$. Напряжение на левом конденсаторе должно быть равно напряжению на резисторе R (конденсатор C_0 пока не заряжен):

$$2\mathscr{E}/3 = IR.$$

С другой стороны,

$$\mathscr{E} = 2I \cdot r + 2\mathscr{E}/3 \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E}/3 = 2Ir.$$

Отсюда найдём, что $R = 4r$.

Критерии:

1) Правильно найден заряд на конденсаторе C до замыкания K_2 . . . . 0,5 балла
2) Правильно найдены заряды, установившиеся после замыкания K_2 . . . . 1 балл
3) Идея о том, что изменение зарядов на обоих конденсаторах должно быть одинаковым . . . . 2 балла
4) Написано равенство для напряжений на одной паре параллельных ветвей в момент замыкания K_2 . 2 балла
5) Написано равенство для напряжений на другой паре параллельных ветвей в момент замыкания K_2 . 2 балла
6) Найдено, что $C_0 = C/3$ . . . . 1 балл
7) Найдено, что $R = 4r$ . . . . 1,5 балла

Указание проверяющим:

1) В пп. 4 и 5 равенства должны быть правильными и содержать силу тока, $\mathscr{E}$, R и/или r.
2) Если вместо равенств, указанных в пп. 4, 5, участник записал правильные уравнение/-ия в произвольный момент времени, для выставления баллов за эти пункты обязательно наличие формулы $I = q'$.
3) Если получен корректным способом верный ответ в п. 6, баллы за пп. 1-3 ставятся автоматически.

Задача 11.3. Дуговой процесс.

Идеальный газ переходит из состояния A в состояние B в процессе, график которого изображён на рис. 11.4. В безразмерных координатах p/p_0 и T/T_0, где p — давление газа, а T — его абсолютная температура, кривая AB представляет собой дугу окружности с центром на горизонтальной оси (в точке с абсциссой 5).

1. Определите минимальную и максимальную температуру в процессе AB, выразив их через параметр T_0.
2. Найдите отношение максимального и минимального объёмов газа в процессе AB.

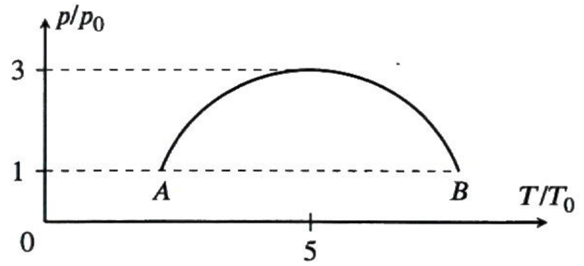


Рис. 11.4.

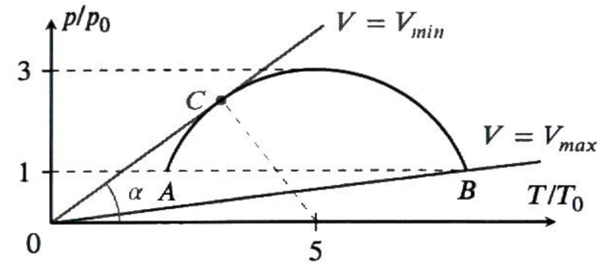


Рис. 11.5.

Ответ: 1) $T_{min} = (5 - 2\sqrt{2})T_0 \approx 2{,}17T_0$, $T_{max} = (5 + 2\sqrt{2})T_0 \approx 7{,}83T_0$; 2) $V_{max}/V_{min} = 3/4 \cdot (5 + 2\sqrt{2}) \approx 5{,}87$.

Решение: 1. Поскольку графиком процесса AB является окружность радиуса 3, минимальная и максимальная температуры (температуры в точках A и B соответственно) равны

$$T_{min} = T_A = T_0\left(5 - \sqrt{3^2 - 1^2}\right) = T_0\left(5 - 2\sqrt{2}\right) \approx 2{,}17T_0,$$

$$T_{max} = T_B = T_0\left(5 + \sqrt{3^2 - 1^2}\right) = T_0\left(5 + 2\sqrt{2}\right) \approx 7{,}83T_0.$$

2. Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует, что объём газа пропорционален величине T/p. Поэтому, чтобы определить точки на кривой AB, в которых объём газа минимален и максимален, нужно из начала координат провести прямые, имеющие общие точки с AB и, соответственно, максимальный и минимальный угловой коэффициент (рис. 11.5). В результате получим, что максимальным объём газа будет в точке B, а минимальным — в точке C. В точке B отношение T/p равно $(T/p)_B = 7{,}83T_0/p_0$, а в точке C —

$$(T/p)_C = \frac{T_0}{p_0} \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{T_0}{p_0} \cdot \frac{\sqrt{5^2 - 3^2}}{3} = \frac{4T_0}{3p_0}.$$

Отсюда найдем отношение максимального и минимального объёмов:

$$\frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{(T/p)_B}{(T/p)_C} = \frac{3}{4} \cdot 7{,}83 \approx 5{,}87.$$

Критерии:

1) Найдено правильное значение T_{min} . . . . 1 балл
2) Найдено правильное значение T_{max} . . . . 1 балл
3) Предложен правильный способ определения точек с минимальным/максимальным объёмом . . . . . 2 балла
4) Найдено, что объём максимален в точке B . . . . 1 балл
5) Правильно найдена точка минимального объёма . . . . 2 балла
6) Правильно найдено отношение T/p в точке B . . . . 1 балл
7) Правильно найдено отношение T/p в точке C . . . . 1 балл
8) Найдено, что $V_{max}/V_{min} \approx 5{,}87$ . . . . 1 балл

Указание проверяющим:

В пп. 6 и 7 могут быть записаны выражения, пропорциональные T/p. Если они верные, баллы за соответствующие пункты ставить.

Задача 11.4. По материалам ЕГЭ.

Из начального положения, находящегося на высоте $3R/4$ (см. рис. 11.6), по поверхности гладкой сферической полости радиуса R скользит маленькая шайба.

1. Определите полное ускорение шайбы в нижней точке полости.
2. Определите, на какой высоте h_1 относительно нижней точки полости полное ускорение шайбы равно по величине ускорению свободного падения g.
3. Определите, на какой высоте h_2 относительно нижней точки полости полное ускорение шайбы в процессе её движения будет минимальным.

Начальная скорость шайбы равна нулю. Сопротивление воздуха и трение отсутствует.

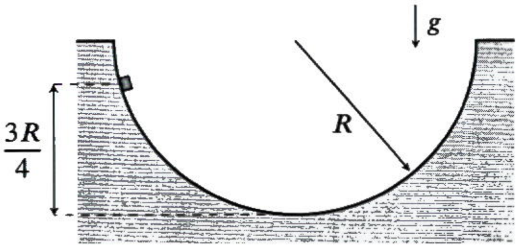


Рис. 11.6.

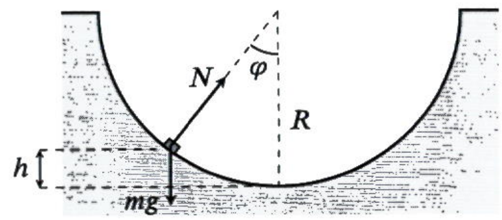


Рис. 11.7.

Ответ: 1) $3g/2$; 2) $h_1 = R/2$; 3) $h_2 = 2R/3$.

Решение: Пусть шайба имеет массу m и в некоторый момент находится на высоте h относительно нижней точки полости. Изобразим силы, действующие на неё — силу тяжести mg и силу реакции опоры N (рис. 11.7). Определим касательное ускорение шайбы:

$$ma_{\text{кас}} = mg\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad a_{\text{кас}} = g\sin\varphi = g\frac{\sqrt{R^2-(R-h)^2}}{R} = g\sqrt{\frac{2h}{R}-\frac{h^2}{R^2}}.$$

Центростремительное ускорение шайбы найдём с помощью ЗСЭ:

$$mg\cdot\frac{3R}{4} = mgh + \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = g\left(\frac{3R}{2}-2h\right) \quad \Rightarrow \quad a_{\text{ц.с.}} = \frac{v^2}{R} = g\left(\frac{3}{2}-\frac{2h}{R}\right).$$

Полное ускорение, в свою очередь, равно $a = \sqrt{a_{\text{кас}}^2 + a_{\text{ц.с.}}^2}$.

1. В нижней точке $h = 0$, следовательно, $a_{\text{кас}} = 0$, а $a_{\text{ц.с.}} = 3g/2$. Отсюда находим, что в этой точке $a = a_{\text{ц.с.}} = 3g/2$.
2. Пусть $a = g$. Тогда

$$g^2 = g^2\left(\frac{2h}{R}-\frac{h^2}{R^2}\right) + g^2\left(\frac{3}{2}-\frac{2h}{R}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{2h}{R}-\frac{h^2}{R^2}+\frac{9}{4}-\frac{6h}{R}+\frac{4h^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{5}{4}-\frac{4h}{R}+\frac{3h^2}{R^2}.$$

Найдём корни полученного уравнения: $h/R = 1/2$ и $h/R = 5/6$. Отбрасывая второй корень, поскольку высота не может быть выше $3R/4$, запишем, что $h_1 = R/2$.

3. Величина a^2 зависит от высоты h по закону:

$$a^2 = g^2\left(\frac{9}{4}-\frac{4h}{R}+\frac{3h^2}{R^2}\right).$$

Найдём положение минимума этой функции, например, с помощью производной:

$$\left(9/4 - 4h/R + 3h^2/R^2\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad -4 + 6h/R = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = 2R/3.$$

Критерии:

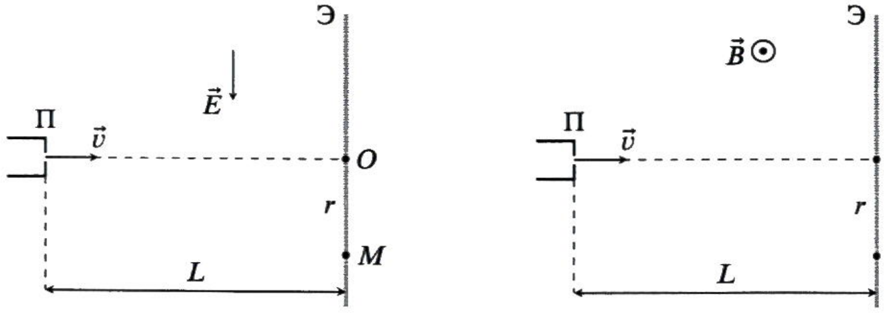
1) Найден правильный ответ на первый вопрос . . . . 1 балл
2) Записано, что $a_{\text{кас}} = g\sin\varphi$, или аналогичная формула . . . . 1 балл
3) Записан ЗСЭ ($mg\cdot 3R/4 = mgh + mv^2/2$ или аналог) . . . . 1 балл
4) Получено верное уравнение, позволяющее найти ответ на 2й вопрос . . . . 1,5 балла
5) Обоснованный отбор корней уравнения из пункта 4 . . . . 1 балл
6) Получено, что $h_1 = R/2$ . . . . 1 балл
7) Получено верное выражение для полного ускорения как функции одной переменной . . . . 1 балл
8) Реализован корректный способ нахождения минимума ускорения . . . . 1 балл
9) Получено, что $h_2 = 2R/3$ . . . . 1,5 балла

Указание проверяющим:

1) Если ЗСЭ записан только в частном случае (для ответа на первый вопрос), баллы за п. 3 не ставить.
2) В п. 8 должна быть правильно вычислена производная или верно найдена вершина параболы.

Задача 11.5. Полёты в полях.

Из ионной пушки П с начальной скоростью v вылетают ионы и попадают в точку O на плоском экране Э, находящемся на расстоянии L от пушки. Когда в пространстве между пушкой и экраном включили однородное электрическое поле напряжённостью E, направленное вдоль плоскости экрана, ионы стали попадать на экране в точку M (рис. 11.8а). Затем электрическое поле выключили и включили однородное магнитное поле индукции B, направленное параллельно экрану и перпендикулярно вектору $\vec{E}$ (рис. 11.8б). Оказалось, что и в этом случае ионы попадают в точку M. Найдите скорость v, если расстояние $OM = r$. Плоскость экрана перпендикулярна вектору $\vec{v}$. Влиянием гравитации пренебречь.



а) б)

Рис. 11.8.

Ответ: $v = E/B \cdot L^2/(r^2 + L^2)$.

Решение: Пусть q — заряд иона, а m — его масса. По характеру отклонения иона в электрическом и магнитном полях делаем вывод, что $q > 0$. Рассмотрим первую ситуацию, когда вдоль поверхности экрана приложено электрическое поле E. В этом случае ускорение иона постоянно, направлено вниз (по рисунку) и равно qE/m. Пусть ион достиг экрана за время t. Тогда

$$L = vt, \qquad r = \frac{qEt^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{qEL^2}{2mv^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{m} = \frac{2v^2r}{EL^2}.$$

Во втором случае ион под действием магнитного поля B движется с постоянной по модулю скоростью вдоль дуги окружности с центром в точке C (см. рис. 11.9). Найдём радиус R этой окружности

$$mv^2/R = qvB \quad \Rightarrow \quad R = mv/(qB).$$

С другой стороны, по теореме Пифагора

$$(R-r)^2 + L^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 - 2Rr + r^2 + L^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{r^2 + L^2}{2r}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{mv}{qB} = \frac{r^2+L^2}{2r} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{m} = \frac{2rv}{B(r^2+L^2)}.$$

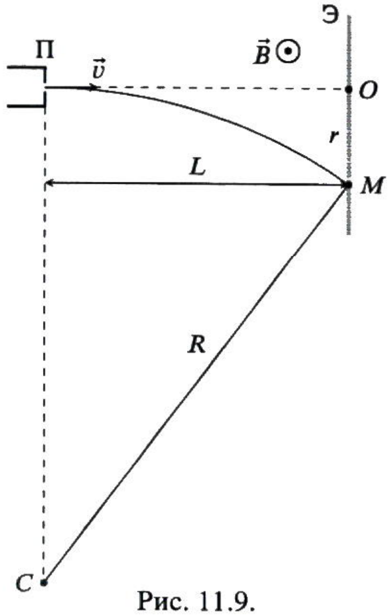


Рис. 11.9.

Приравнивая теперь правые части получившихся уравнений, получим выражение для скорости v:

$$\frac{2v^2r}{EL^2} = \frac{2rv}{B(r^2+L^2)} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B} \cdot \frac{L^2}{r^2+L^2}.$$

Критерии:

1) Формула $L = vt$ или аналог .... 0,5 балла
2) Формула $r = qEt^2/(2m)$ или аналог .... 1 балл
3) Из формул в пп. 1 и 2 корректно исключено время .... 2 балла
4) Формула $R = mv/(qB)$ или аналог .... 1 балл
5) Записана правильная связь между R, r и L .... 1,5 балла
6) Из формул в пп. 5 и 6 корректно исключено R .... 2 балла
7) Получено, что $v = E/B \cdot L^2/(L^2 + r^2)$ .... 2 балла

Указание проверяющим:

В п. 5 достаточно записать формулу $(R-r)^2 + L^2 = R^2$.

Максимально возможный балл в 11 классе 50